

 Σχέδιο Μαθήματος

Σχέδιο Μαθήματος: Συναρτήσεις

 45 λεπτά

Μαθησιακοί Στόχοι

Τι αναμένεται να κατακτήσουν οι μαθητές στο τέλος της διδακτικής ώρας

> Στόχοι

- Να διατυπώνουν με ακρίβεια τον ορισμό της συνάρτησης ως αντιστοίχιση όπου σε κάθε x του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μία μόνο τιμή $f(x)$.
- Να εντοπίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης από τον τύπο της, εξετάζοντας πότε η παράσταση έχει νόημα.
- Να προσδιορίζουν το σύνολο τιμών σε απλές περιπτώσεις από τύπο ή από πίνακα/λεκτική περιγραφή.
- Να χρησιμοποιούν σωστά την ορολογία: ανεξάρτητη μεταβλητή, εξαρτημένη μεταβλητή, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών.
- Να αιτιολογούν αν μια δοσμένη αντιστοίχιση αποτελεί συνάρτηση ή όχι.

Χαρακτηριστικά της τάξης

- Δυσκολία στη θετική αλληλεπίδραση μεταξύ συνομηλίκων: απαιτούνται σαφείς ρόλοι, συγκεκριμένοι χρόνοι ομιλίας και πρότυπα ευγενικής διαφωνίας.
- Ανάγκη ενίσχυσης του σεβασμού: διατυπώνονται από την αρχή κανόνες όπως «Ακούμε χωρίς διακοπή», «Διαφωνούμε με το επιχείρημα, όχι με το πρόσωπο», «Ζητούμε διευκρίνιση με ευγενικό τρόπο».

Χαρακτηριστικά των Μαθητών

- Γλωσσικά εμπόδια: χρησιμοποιείται απλή ακαδημαϊκή γλώσσα, επανάληψη βασικών όρων στον πίνακα και οπτική οργάνωση των εννοιών.
- Αδύναμες κοινωνικές δεξιότητες: οι συνεργασίες είναι δομημένες, με έτοιμες φράσεις συμμετοχής όπως «Συμφωνώ επειδή...», «Διαφωνώ γιατί...», «Μπορείς να εξηγήσεις το βήμα;».

Δραστηριότητα Ενεργοποίησης

Σύντομη ομαδική δραστηριότητα με ρόλους για ασφαλή είσοδο στο θέμα

> Βήματα Εκτέλεσης

- Χωρίστε την τάξη σε 5 ομάδες των 5 μαθητών.
- Αναθέστε σε κάθε ομάδα ρόλους: συντονιστής, αναγνώστης, ελεγκτής ορολογίας, εκπρόσωπος, χρονομέτρης.
- Γράψτε στον πίνακα 4 σύντομες αντιστοιχίσεις, π.χ. «σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζεται ο ΑΜ του», «σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζεται το αγαπημένο του μάθημα», «σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζεται το x^2 », «σε κάθε x αντιστοιχίζονται οι αριθμοί x και $-x$ ».
- Ζητήστε από τις ομάδες να αποφασίσουν ποιες περιπτώσεις είναι συναρτήσεις και να αιτιολογήσουν με μία πρόταση.
- Ο εκπρόσωπος κάθε ομάδας δίνει προφορικά μία απάντηση. Εναλλακτικά, μαθητής με κινητική δυσκολία μπορεί να δώσει μόνο προφορική αιτιολόγηση ενώ άλλο μέλος καταγράφει.



Διάταξη Χώρου

- Οι ομάδες παραμένουν στις θέσεις τους στην αίθουσα για να αποφεύγονται άσκοπες μετακινήσεις.
- Ο πίνακας παραμένει το κεντρικό σημείο αναφοράς.
- Φροντίστε να υπάρχει προσβάσιμος διάδρομος και οπτική επαφή όλων με τον πίνακα.
- Το σχολικό βιβλίο μένει ανοιχτό μόνο αν χρειαστεί σύντομη υπενθύμιση ορολογίας· κύριο εργαλείο είναι ο πίνακας.

Σημειώσεις για τον Εκπαιδευτικό

- Μοντελοποιήστε πρώτα μία ευγενική απάντηση: «Θεωρούμε ότι δεν είναι συνάρτηση, επειδή το ίδιο x δεν πρέπει να οδηγεί σε δύο τιμές».
- Υπενθυμίστε πριν από τη συζήτηση τους κανόνες σεβασμού και τη σειρά ομιλίας.

- Αν προκύψει ένταση, σταματήστε σύντομα τη συζήτηση και επαναφέρετε τη φράση-πλαίσιο: «Ακούμε, σκεφτόμαστε, τεκμηριώνουμε».
- Για μαθητές με γλωσσικές δυσκολίες, κρατήστε στον πίνακα τις λέξεις-κλειδιά: «μία τιμή», «όχι δύο τιμές», «κανόνας αντιστοίχισης».

Εμπλοκή με Πρόβλημα

Πρόβλημα πραγματικού κόσμου που οδηγεί φυσικά στην ανάγκη ορισμού



Πρόβλημα Πραγματικού Κόσμου

Σε μια σχολική καταγραφή θέλουμε να ορίσουμε έναν κανόνα που, για κάθε μαθητή της τάξης, δίνει έναν μόνο αριθμό. Συζητήστε ποιος από τους παρακάτω κανόνες μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση:

- σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζεται το ύψος του,
- σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζονται τα τηλέφωνα επικοινωνίας του,
- σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζεται ο αριθμός απουσιών του.

Στόχος είναι να κατανοηθεί γιατί η φράση «μία είσοδος - μία μόνο έξοδος» είναι κρίσιμη.



Ερωτήσεις για Συζήτηση

- Ποιος από τους παραπάνω κανόνες δίνει πάντοτε μία μόνο τιμή;
- Αν ένα στοιχείο μπορεί να έχει δύο τιμές, γιατί ο κανόνας δεν είναι συνάρτηση;
- Τι θα ήταν εδώ το πεδίο ορισμού;
- Ποιο θα ήταν το σύνολο τιμών;

Σύνδεση με Εμπειρίες

- Η δραστηριότητα συνδέεται με καθημερινά σχολικά δεδομένα που οι μαθητές αναγνωρίζουν άμεσα.
- Η οικεία εμπειρία μειώνει τη γλωσσική επιβάρυνση, γιατί οι έννοιες υποστηρίζονται από πραγματικές καταστάσεις.
- Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν προφορικά, σύντομα και με παράδειγμα, ώστε να συμμετέχουν ισότιμα και μαθητές που δυσκολεύονται στη γραπτή διατύπωση.

Άμεση Διδασκαλία

Σαφής παρουσίαση των βασικών εννοιών με σταδιακή οικοδόμηση

📄 Ορισμός

- Ορίστε ότι μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι ένας κανόνας που σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζει έναν και μόνο έναν πραγματικό αριθμό $f(x)$.
- Τονίστε ότι το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το $y = f(x)$ η εξαρτημένη μεταβλητή.
- Γράψτε στον πίνακα τη συμβολική μορφή:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

- Ορίστε επίσης το σύνολο τιμών ως το σύνολο όλων των αριθμών που παίρνει η συνάρτηση.

💡 Εξήγηση Εννοιών

- Δείξτε ότι για να βρούμε πεδίο ορισμού από έναν τύπο, εξετάζουμε πότε η παράσταση έχει νόημα.

- Παράδειγμα 1: για $f(x) = \frac{1}{x-2}$ απαιτούμε $x \neq 2$, άρα

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

- Παράδειγμα 2: για $g(x) = \sqrt{x+1}$ απαιτούμε $x+1 \geq 0$, άρα

$$D_g = [-1, +\infty)$$

- Τονίστε ότι το σύνολο τιμών δεν είναι το ίδιο με το πεδίο ορισμού: το πρώτο αφορά τις επιτρεπτές εισόδους, το δεύτερο τις παραγόμενες εξόδους.

🖼️ Οπτικά Βοηθήματα

- Χρησιμοποιήστε τον πίνακα σε δύο στήλες: «Είσοδος x » και «Έξοδος $f(x)$ ».
- Σχεδιάστε βέλη αντιστοίχισης για μία απλή περίπτωση, π.χ. $x \mapsto x^2$ για $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- Κυκλώστε με διαφορετικό τρόπο το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών, ώστε να γίνει οπτικά σαφής η διάκριση.
- Κρατήστε σταθερά στον πίνακα τους βασικούς όρους για όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Συνηθισμένες Παρανοήσεις

- Παρανόηση 1: «Αν δύο διαφορετικά x δίνουν την ίδια τιμή, δεν είναι συνάρτηση». Διευκρινίστε ότι αυτό επιτρέπεται· απαγορεύεται μόνο το ίδιο x να δίνει δύο διαφορετικές τιμές.
- Παρανόηση 2: «Το πεδίο ορισμού είναι πάντα οι πραγματικοί αριθμοί». Διευκρινίστε ότι αυτό ισχύει μόνο όταν ο τύπος έχει νόημα για κάθε πραγματικό x .
- Παρανόηση 3: «Σύνολο τιμών σημαίνει όλες οι πιθανές τιμές που φανταζόμαστε». Διευκρινίστε ότι είναι μόνο οι τιμές που πράγματι προκύπτουν από το πεδίο ορισμού.

Χρήση Υλικών

- Χρησιμοποιήστε το σχολικό βιβλίο μόνο για σύντομη επιβεβαίωση της ορολογίας.
- Ο πίνακας είναι το βασικό μέσο: γράψτε ορισμούς, παραδείγματα και χρωματικά διακριτές επισημάνσεις όπου είναι δυνατόν.
- Οι μαθητές μπορούν να παρακολουθούν χωρίς εκτεταμένη αντιγραφή· δώστε χρόνο για προφορικές ερωτήσεις και επιλεκτική καταγραφή των κρίσιμων σημείων.
- Για μαθητές με κινητικές δυσκολίες, επιτρέψτε προφορική απάντηση ή υπαγόρευση σε συμμαθητή για τις βασικές σημειώσεις.

Μοντελοποίηση

Παράδειγμα με πλήρη λύση και λεκτική αιτιολόγηση κάθε βήματος

📄 Πρόβλημα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{2x - 4}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

Σκέψη Φωναχτά

- Πρώτα ελέγχω ποιος περιορισμός προκύπτει από τον τύπο. Εδώ υπάρχει ρίζα, άρα το υπόριζο δεν μπορεί να είναι αρνητικό.
- Έπειτα λύνω την ανίσωση προσεκτικά και μεταφράζω το αποτέλεσμα σε διάστημα.
- Για το σύνολο τιμών, δεν ξανακοιτάζω τις επιτρεπτές εισόδους αλλά τις εξόδους της συνάρτησης.
- Ρωτώ: ποια είναι η μικρότερη τιμή; Υπάρχει μέγιστη; Έτσι αποφεύγω να συγχέω το D_f με το $f(D_f)$.

🕒 Πλήρης Λύση

Για να ορίζεται η συνάρτηση, πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικό:

$$2x - 4 \geq 0$$

Άρα:

$$2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι:

$$D_f = [2, +\infty)$$

Τώρα, επειδή η τετραγωνική ρίζα παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, έχουμε:

$$f(x) \geq 0$$

Για $x = 2$ παίρνουμε:

$$f(2) = \sqrt{0} = 0$$

Καθώς το x αυξάνεται, το $2x - 4$ αυξάνεται χωρίς άνω φράγμα, άρα και το $\sqrt{2x - 4}$ αυξάνεται χωρίς άνω φράγμα. Επομένως, το σύνολο τιμών είναι:

$$f(D_f) = [0, +\infty)$$

Επαλήθευση

- Έλεγχος πεδίου ορισμού: για $x = 1$ έχουμε $2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$, άρα πράγματι η συνάρτηση δεν ορίζεται.
- Για $x = 2$ η συνάρτηση ορίζεται και δίνει 0, άρα το αριστερό άκρο περιλαμβάνεται.
- Για $x = 6$ έχουμε $f(6) = \sqrt{8}$, που είναι θετικός πραγματικός αριθμός, άρα οι τιμές είναι πράγματι μη αρνητικές.
- Το αποτέλεσμα είναι συνεπές: είσοδοι από το $[2, +\infty)$, έξοδοι από το $[0, +\infty)$.

Χρήση Υλικών

- Στον πίνακα γράψτε τη λύση σε αριθμημένα βήματα ώστε οι μαθητές να παρακολουθούν τη λογική ακολουθία.
- Ζητήστε από τους μαθητές να εντοπίζουν προφορικά το «γιατί» κάθε βήματος πριν το καταγράψετε.
- Το βιβλίο μπορεί να λειτουργήσει υποστηρικτικά μόνο ως αναφορά στη γενική λογική εύρεσης πεδίου ορισμού.
- Η συμμετοχή μπορεί να γίνει προφορικά, χωρίς ανάγκη μετακίνησης ή γραφής στον πίνακα από μαθητές.

Παραδείγματα και Ασκήσεις

Δομημένη ομαδική επίλυση με σαφείς ρόλους και στενή καθοδήγηση



Συνεργατικό Πρόβλημα

Κάθε ομάδα εξετάζει τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

και απαντά στα εξής:

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός 3 αποκλείεται.
- Να αποφασίσετε αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Υπόδειξη για το τελευταίο ερώτημα: εξετάστε αν υπάρχει x ώστε $g(x) = 0$.



Ρόλοι Ομάδας

- Συντονιστής: διαβάζει τα βήματα και φροντίζει να ακουστούν όλοι.
- Γραμματέας ή καταγραφέας μέσω συμμαθητή: σημειώνει τη συλλογιστική της ομάδας. Αν κάποιο μέλος δυσκολεύεται στη γραφή, αναλαμβάνει προφορική υπαγόρευση.
- Ελεγκτής ακρίβειας: επιβεβαιώνει τη μαθηματική ορθότητα και τη σωστή χρήση των όρων.
- Εκπρόσωπος: παρουσιάζει σύντομα το αποτέλεσμα.
- Υπεύθυνος σεβασμού/χρόνου: υπενθυμίζει τις φράσεις συνεργασίας και τη χρονική πειθαρχία.

Οδηγίες Ομάδας

- Εργαστείτε σε ομάδες των 5 χωρίς μετακίνηση θρανίων, ώστε να διατηρηθεί προσβάσιμος ο χώρος.

- Ακολουθήστε κοινή σειρά: πρώτα πεδίο ορισμού, μετά αιτιολόγηση αποκλεισμού, τέλος σύνολο τιμών.
- Χρησιμοποιήστε τις φράσεις: «Προτείνω ότι...», «Τεκμηριώνω με...», «Ελέγχω αν...», «Διαφωνώ ευγενικά επειδή...».
- Κάθε ομάδα οφείλει να παρουσιάσει μία αιτιολόγηση, όχι μόνο το τελικό αποτέλεσμα.
- Εναλλακτική συμμετοχή: μαθητής μπορεί να συνεισφέρει με προφορικό έλεγχο των βημάτων αντί για γραπτή καταγραφή.

Διάταξη Χώρου

- Οι μαθητές εργάζονται εντός της αίθουσας, σε σταθερές θέσεις, με προφορική συνεργασία χαμηλής έντασης.
- Ο πίνακας μένει διαθέσιμος για κοινές υποδείξεις και συλλογή απαντήσεων.
- Η διάταξη διατηρεί καθαρές διόδους για μαθητές με κινητικές δυσκολίες.
- Το σχολικό βιβλίο χρησιμοποιείται μόνο ως σημείο αναφοράς για την ορολογία, όχι για έτοιμη λύση.

Σημειώσεις Διευκόλυνσης

- Περιηγηθείτε ανάμεσα στις ομάδες και ελέγξτε αν τηρούν τη διάκριση μεταξύ πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών.
- Αν μια ομάδα κολλήσει, δώστε νύξη: «Για το σύνολο τιμών, θέστε $g(x) = y$ ή ειδικά $g(x) = 0$ και ελέγξτε αν προκύπτει επιτρεπτό x ».
- Επιβραβεύστε δημόσια τεκμηριωμένες και σεβαστές παρεμβάσεις, όχι μόνο σωστά αποτελέσματα.
- Αν εμφανιστεί αποκλεισμός μέλους, ανακαταναίμετε αμέσως τον λόγο με συγκεκριμένη οδηγία: «Τώρα ακούγεται η άποψη του ελεγκτή ακρίβειας».

Χρήση Υλικών

- Ο πίνακας χρησιμοποιείται για να καταγραφούν τα ενδιάμεσα κριτήρια: «παρονομαστής $\neq 0$ », «έλεγχος αν μια τιμή παράγεται».
- Τα σχολικά βιβλία λειτουργούν βοηθητικά για την υπενθύμιση συμβολισμών όπως D_f και $f(A)$.

- Αποφύγετε πρόσθετα υλικά· όλη η συνεργασία στηρίζεται στον προφορικό διάλογο και στην κοινή αναφορά στον πίνακα.
- Δώστε λίγο επιπλέον χρόνο σε ομάδες όπου η καταγραφή γίνεται μέσω υπαγόρευσης ή υποστήριξης από συμμαθητή.

Διαφοροποίηση

Υποστηρίξεις, επεκτάσεις και προσβάσιμες διαδρομές συμμετοχής

📖 Υποστήριξη για Μαθητές με Δυσκολίες

- Δώστε λεκτικό πλαίσιο με σταθερές ερωτήσεις: «Τι απαγορεύει ο τύπος;», «Ποιες τιμές του x επιτρέπονται;», «Τι τιμές μπορεί να πάρει το $f(x)$;».
- Κρατήστε στον πίνακα έτοιμο πρότυπο επίλυσης για πεδίο ορισμού σε 3 βήματα.
- Επιτρέψτε προφορική αιτιολόγηση αντί εκτεταμένης γραπτής ανάπτυξης.
- Παρέχετε περισσότερο χρόνο επεξεργασίας οδηγιών και επαναδιατύπωση με απλούστερη γλώσσα.

↗ Επεκτάσεις για Προχωρημένους

- Ζητήστε να συγκρίνουν τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ ως προς πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών.
- Προκαλέστε τους να διατυπώσουν δικό τους παράδειγμα συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένωση δύο διαστημάτων.
- Ζητήστε σύντομη αιτιολόγηση για το γιατί δύο διαφορετικές συναρτήσεις μπορεί να έχουν ίδιο σύνολο τιμών.

📍 Προσαρμογές

- Όλες οι δραστηριότητες ολοκληρώνονται από τη θέση του μαθητή, χωρίς απαίτηση μετακίνησης ή γραφής στον πίνακα.
- Επιτρέψτε εναλλακτικούς τρόπους επίδειξης κατανόησης: προφορική απάντηση, υπαγόρευση σε συμμαθητή, σύντομη λεκτική παρουσίαση ομάδας.
- Διατηρήστε προσβάσιμο χώρο, καθαρές διαδρομές και υλικά άμεσα ορατά από όλες τις θέσεις.

- Παρέχετε προσαρμοσμένο ρυθμό και επιπλέον χρόνο όπου χρειάζεται, χωρίς μείωση των γνωστικών απαιτήσεων.



Γλωσσική Υποστήριξη

- Γράψτε σταθερά στον πίνακα βασικούς όρους και σύμβολα: «πεδίο ορισμού», «σύνολο τιμών», «ανεξάρτητη μεταβλητή», «εξαρτημένη μεταβλητή».
- Συνδυάστε λεκτική εξήγηση με οπτικό παράδειγμα αντιστοίχισης και απλά αριθμητικά παραδείγματα.
- Χρησιμοποιήστε σύντομες προτάσεις, αργό ρυθμό εκφώνησης και έλεγχο κατανόησης με ερώτηση κλειστού τύπου πριν από τη γενίκευση.
- Επιτρέψτε υποστηρικτική συνεργασία με συμμαθητή για επαναδιατύπωση οδηγιών και κοινή διαμόρφωση απάντησης.